Teoremi di Fermat, Rolle, Lagrange, Cauchy, de l'Hôpital

Punto critico o punto stazionario

Definizione:

★ In analisi matematica si chiama punto critico o punto stazionario di una funzione derivabile definita su un insieme aperto dei numeri reali a valori reali

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

un punto x_0 in cui la derivata $f'(x_0)$ si annulla:

$$x_0 \quad \text{stazionario} \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_0) = 0$$

Teorema di Fermat

Ipotesi:

★ Sia una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

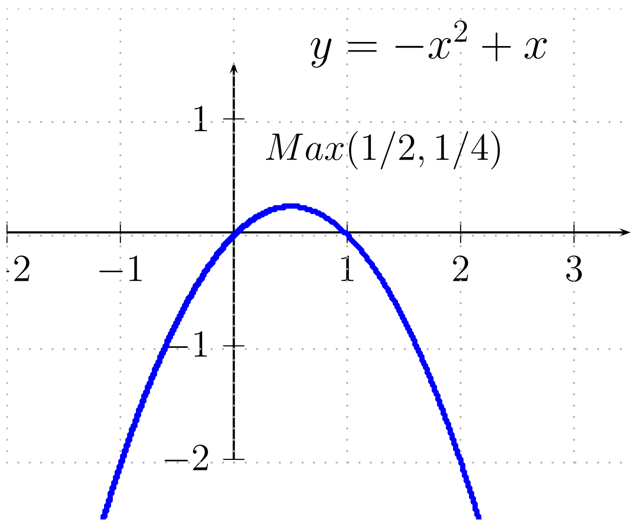
★ si supponga che x_0 sia interno ad (a, b) ed esso sia un punto di massimo (Max) o di minimo (Min) relativo di f.

★ Se f è derivabile in x_0, allora

Tesi:

★ $f'(x_0) = 0$.

Verifica del teorema di Fermat



Prof. P. Terrecuso *Teoremi di funzioni derivabili – 5 / 30*

Teorema di Fermat: dimostrazione.

Se x_0 punto di Max o di Min ed f è derivabile in x_0 $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$.

Si supponga che x_0 sia un punto di massimo locale.
Allora $\exists\, \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ e tale che si abbia

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall\, x \text{ con } |x - x_0| < \delta.$$

Quindi, $\forall\, h$ contenuto in $(0, \delta)$ vale

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Dato che il limite di questo rapporto per $h \to 0$ da destra esiste ed è pari a $f'(x_0)$, allora $f'(x_0) \leq 0$.

Allo stesso modo, per h contenuto in $(-\delta, 0)$ si nota che

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0,$$

ma ancora una volta il limite per $h \to 0$ da sinistra vale $f'(x_0)$ così anche $f'(x_0) \geq 0$.

Si conclude, pertanto, che $f'(x_0) = 0$.

Prof. P. Terrecuso *Teoremi di funzioni derivabili – 6 / 30*

Teorema di Fermat

Se x_0 punto di Max o di Min ed f è derivabile in x_0 $\quad\Rightarrow\quad f'(x_0) = 0$.

Osservazioni:

★ si tratta di una condizione necessaria ma non sufficiente, infatti può anche accadere che $f'(x_0) = 0$ eppure x_0 non è un punto estremo, cioè di Max o di Min, ma di flesso a tangente orizzontale;

★ in altre parole nelle ipotesi del teorema è vero che tutti i punti estremi sono stazionari, ma esistono anche alcuni punti stazionari che non sono punti estremi.

★ Nel caso che una delle ipotesi non sia verificata, come la derivabilità in x_0, si potrebbe avere ancora un punto di Max o di Min senza che sia verificata la tesi del teorema.

Teorema di Rolle

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

Ipotesi:

★ $f(x)$ funzione continua in $[a, b]$

★ $f(x)$ derivabile in (a, b)

★ e assume valori uguali $f(a) = f(b)$

Tesi:

★ esiste almeno un punto critico o stazionario x_0 interno ad (a, b), cioè un punto $x_0 \in (a, b)$ la cui derivata si annulla $(f'(x_0) = 0)$.

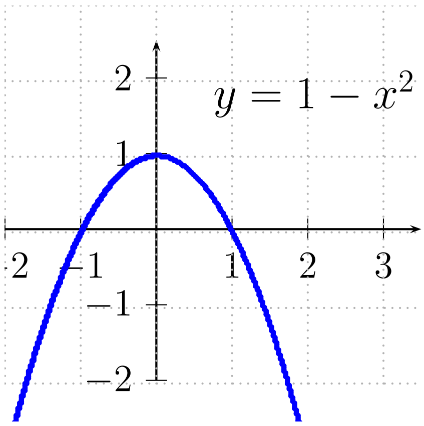
Teorema di Rolle

Se $f(x)$ cont. in $[a, b]$ e deriv. in $(a, b) \wedge f(a) = f(b) \;\Rightarrow\; \exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = 0$

⋆ significato geometrico

Verifica del teorema di Rolle

La funzione $y = 1 - x^2$ soddisfano le condizioni del teorema di Rolle nell'intervallo $[-1, 1]$?
In caso affermativo calcolare l'ascissa c del punto che verifica il suddetto teorema.



Teorema di Weierstrass

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

Ipotesi:

★ $f(x)$ funzione continua in $[a, b]$

Tesi:

★ allora $f(x)$ assume massimo (M) e minimo (m) nell'intervallo $[a, b]$, cioè esistono $x_m,\ x_M \in [a, b]$ tali che:

$$\forall x \in [a, b] \quad \text{si abbia} \quad f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$

dove

$$f(x_m) = m \qquad f(x_M) = M$$

Teorema di Rolle: dimostrazione.

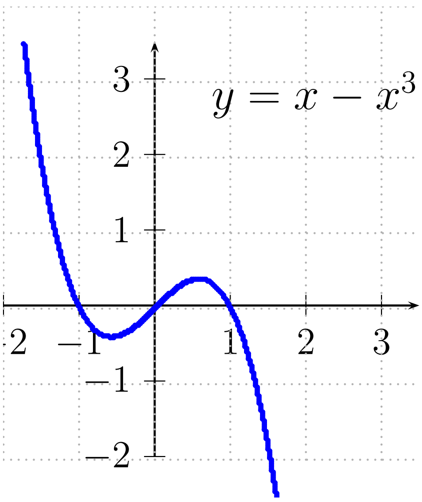
★ In virtù del Teorema di Weierstrass la funzione sull'intervallo $[a, b]$ ammette massimo e minimo assoluti (che indichiamo rispettivamente con M e m).

Caso 1) Il massimo e il minimo sono entrambi raggiunti negli estremi e quindi poiché $f(a) = f(b)$ ne segue che $M = m$.
Questo implica che la funzione è costante sull'intervallo $[a, b]$ e quindi la derivata è nulla in ciascun punto c dell'intervallo (a, b).

Caso 2) Il massimo o il minimo sono raggiunti all'interno dell'intervallo. Per fissare le idee, consideriamo il caso in cui il massimo è raggiunto in un punto c dell'intervallo aperto (a, b), cioè $f(c) = M$.
Dunque per il Teorema di Fermat sui punti stazionari la derivata è nulla nel punto c.

Verifica del teorema di Rolle

La funzione $y = x - x^3$ soddisfano le condizioni del teorema di Rolle nell'intervallo $[0, 1]$?
In caso affermativo calcolare l'ascissa c del punto che verifica il suddetto teorema.



Teorema di Lagrange

Ipotesi:

★ $f(x)$ funzione continua in $[a, b]$

★ $f(x)$ derivabile in (a, b)

Tesi:

★ esiste almeno un punto x_0 appartenente ad (a, b) per cui:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

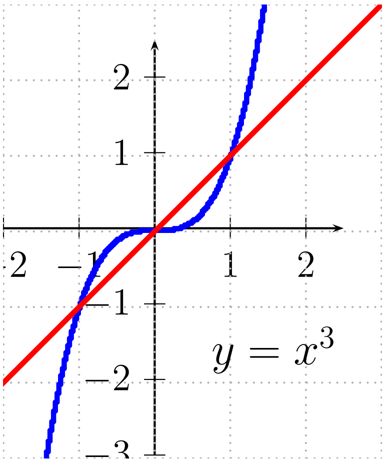
Teorema di Lagrange

★ Se $f(x)$ cont. in $[a, b]$ e deriv. in (a, b) $\Rightarrow$ $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

- significato geometrico
- se $f(a) = f(b)$ si ricade nel Teorema di Rolle.

Verifica del teorema di Lagrange

La funzione $y = x^3$ soddisfano le condizioni del teorema di Lagrange nell'intervallo $[-1, 1]$?
In caso affermativo calcolare l'ascissa c del punto che verifica il suddetto teorema.



Teorema di Lagrange: dimostrazione.

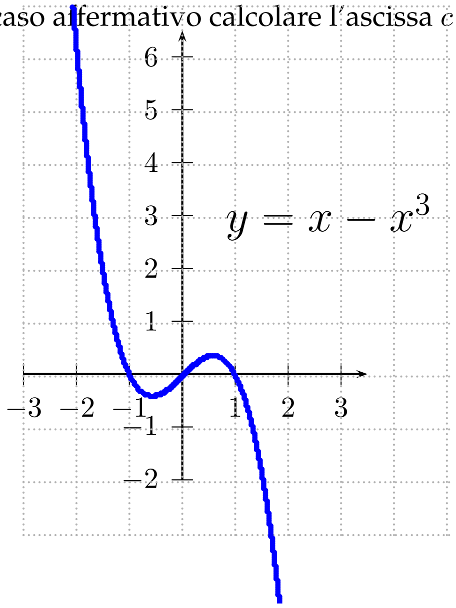
★ Se $f(x)$ cont. in $[a,b]$ e deriv. in (a,b) $\Rightarrow$ $f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

⋆ Sia
$$y(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$
l'equazione della retta passante per i punti $A(a,f(a)), B(b,f(b))$

Vale che:
$$y(a) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = f(a)$$
$$y(b) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(a) + f(b) - f(a) = f(b)$$
Quindi posta la funzione cont. e deriv. $h(x) = f(x) - y(x)$, questa si annulla nei punti a e b:
$$h(a) = f(a) - y(a) = 0 \qquad h(b) = f(b) - y(b) = 0$$
Per il teorema di Rolle
$$\exists\, x_0 \in (a,b) : h'(x_0) = 0$$
$$h'(x_0) = f'(x_0) - y'(x_0) = 0 \Longrightarrow f'(x_0) = y'(x_0)$$

Verifica del teorema di Lagrange

La funzione $y = x - x^3$ soddisfano le condizioni del teorema di Lagrange nell'intervallo $[-2,1]$?
In caso affermativo calcolare l'ascissa c del punto che verifica il suddetto teorema.



Teorema di Cauchy

Ipotesi:

★ $f(x)$ e $g(x)$ funzioni continue in $[a,b]$

★ $f(x)$ e $g(x)$ derivabili in (a,b) con $g'(x) \neq 0$ in (a,b)

Tesi:

★ esiste almeno un punto c interno all'intervallo $[a,b]$ in cui

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Osservazione:

la condizione $g'(x) \neq 0$ in (a,b) garantisce che $g(b) \neq g(a)$, infatti se così non fosse potrei applicare Rolle a $g(x)$ e ottenere che $g(x)$si annulli in qualche punto contrariamente all'ipotesi.

Teorema di Cauchy: dimostrazione.

★ Se $f(x)$ e $g(x)$ cont. in $[a,b]$ e deriv. in (a,b) con $g'(x) \neq 0$ in $(a,b) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

★ Sia la funzione di variabile reale $h(t)$ definita nell'intervallo $[a,b]$ come

$$h(t) = [f(b)-f(a)]g(t) - [g(b)-g(a)]f(t)$$

Questa funzione è continua nell'intervallo $[a,b]$ e derivabile in (a,b), e

$$h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = h(b).$$

La funzione $h(t)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle, per cui esiste un punto $c \in (a,b)$ in cui $h'(c) = 0$, cioè

$$[f(b)-f(a)]g'(c) - [g(b)-g(a)]f'(c) = 0,$$

da cui la tesi.

Regola di de l'Hôpital

La regola di de l'Hôpital utilizza le derivate per il calcolo di limiti di forme indeterminate, tipicamente del tipo

$$\frac{0}{0} \quad \text{e} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

La regola può essere utile anche per trattare forme indeterminate del tipo $[0 \cdot \infty]$, come anche $[1^\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$, e $[\infty - \infty]$

Nella sua forma più semplice la regola afferma che se

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \text{ oppure } \lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$$

$$\text{ed esiste} \qquad \lim_{x\to c} f'(x)/g'(x)$$

$$\text{allora} \qquad \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Teorema di de l'Hôpital

Date due funzioni reali di variabile reale f e g

- ★ continue e derivabili in tutti i punti di un intorno I del punto c (finito o infinito) escluso al più c stesso,
- ★ se $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$ tranne al più il punto c,
- ★ se esiste un $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tale che

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

- ★ e se

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$$

oppure

$$\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$$

- ★ allora

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Quando de l'Hôpital non si può applicare

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{cosx}{x} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{2x + senx}{x}$$

de l'Hôpital iterato...

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - senx + x^5}{x^3}$$

Prof. P. Terrecuso *Teoremi di funzioni derivabili – 24 / 30*

Teorema di de l'Hôpital: dimostrazione

Dimostrazione di un caso particolare del teorema di de l'Hôpital facendo uso del teorema di Cauchy:

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}.$$

Per il teorema di Cauchy, $\exists\, c$ interno all'intervallo $[x_0, x]$ tale che

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c_x\to x_0^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Prof. P. Terrecuso *Teoremi di funzioni derivabili – 25 / 30*

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab} \qquad \lim_{x\to 0} (1 + \theta x)^{\frac{1}{x}} = e^\theta$$

Prof. P. Terrecuso *Teoremi di funzioni derivabili – 26 / 30*

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Prof. P. Terrecuso *Teoremi di funzioni derivabili – 27 / 30*

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a, a>0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\theta}-1}{x}=\theta$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(nx)}{mx}=\frac{n}{m} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0$$

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)}{x}=1$$